



الگو و دنباله

دنباله: تعدادی عدد که پشت سر هم قرار گرفته اند را دنباله

می نامیم و به این اعداد، جملات دنباله می گوییم

الگو: تعدادی شکل و یا عدد که با قانون مشخصی پشت سر هم

قرار گرفته اند را الگو می نامیم

به این قانون، جمله ی عمومی (ضابطه) الگو می گوییم و معمولاً آن را

با a_n (شاید هم b_n یا t_n) نمایش می دهیم. به عنوان مثال جمله ی

پانزدهم یک الگو را با a_{15} نشان می دهیم

هنگامی که الگویی از شکل ها داریم و می خواهیم جمله ی عمومی

آن را بنویسیم، بهترین کار کشیدن یک جدول برای نشان دادن تغییرات

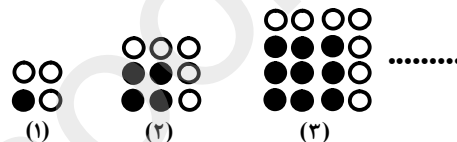
در هر مرحله است. در این جدول باید حواسمان به قسمت های مشترک در

همه ی شکل ها و میزان افزایش در مراحل بعد باشد

[?] مثال ۱: در شکل زیر اگر a_n الگوی تعداد دایره های رنگی و

b_n الگوی دایره های غیر رنگی باشد، در مرحله ی دهم چند دایره ی

رنگی و چند دایره ی غیر رنگی داریم؟



پاسخ: می توانیم اینجور برای خرد کردن توضیح بدیم که دایره های رنگی در هر مرحله کامل

هستن و شماره ی جمله ی آن می توانیم (n^2) ، تعداد دایره های رنگی رو تخمین می کند

و تعداد دایره های سفید اعدادی خرد هستن $(2n+1)$ مثل جدول زیر:

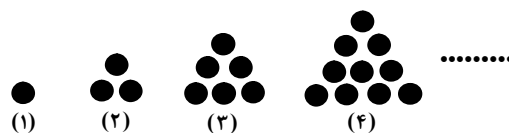
شماره ی شکل	۱	۲	۳		n
a_n الگوی	۱ ^۲	۲ ^۲	۳ ^۲		n^2
b_n الگوی	$2(1)+1$	$2(2)+1$	$2(3)+1$		$2(n)+1$

پس در مرحله ی دهم تعداد دایره های رنگی برابر $10^2 = 100$ خواهد بود و تعداد دایره

های سفید برابر $2(10)+1 = 21$

[?] مثال ۲: برای شکل زیر، یک مدل در نظر بگیرید.

(الگوی آن را به خاطر بسپارید)



پاسخ: جملات دنباله از یک الگوی مثلثی پیروی می کند

یادآوری: هر الگویی که هر جمله ی آن از مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا شماره ی

همان جمله باشد را یک الگوی مثلثی می نامیم و جمله ی عمومی آن به صورت زیر است

$$a_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

با نوشتن جملات تعداد دایره ها در یک جدول راحت تر تعداد دایره ها و الگویی که از اول پیروی

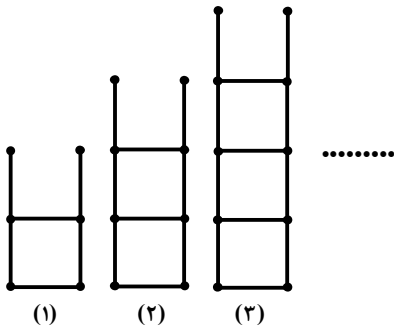
می کند رو متوجه می شید

شماره ی شکل	۱	۲	۳		n
a_n	۱	۱+۲	۱+۲+۳		۱+۲+۳+...+n

ایستگاه آخر ریاضی کنکور

[?] مثال ۳: با توجه به شکل زیر تعداد پاره خط در کدام

مرحله ۳۳ تا است؟



(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

پاسخ: به کمک جدول زیر، تعداد پاره خط های هر مرحله را می نویسیم

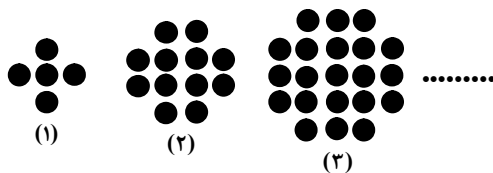
شماره ی شکل	۱	۲	۳		n
a_n	2×3	3×3	4×3		$(n+1) \times 3$

پس جمله ی عمومی این دنباله $a_n = (n+1) \times 3$ است. حالا دنباله مرحله ی هفتم

که $a_n = 33$ باشد به برابری می توان نوشت:

$$(n+1) \times 3 = 33 \Rightarrow n+1 = 11 \Rightarrow n = 10$$

[?] مثال ۴: در الگوی مقابل، اختلاف شکل هشتم و نهم کدام است؟



(۱) ۱۷

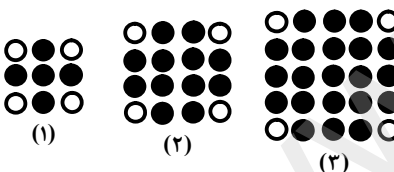
(۲) ۱۹

(۳) ۲۱

(۴) ۲۳

پاسخ: برای راحتی کار آنکه تو ذهنیت به سری گوی سفید گوشه های شکل ها

بیاوریم براحتی می توانیم الگو رو پیش بینیم کنی



حالا به کمک جدول می توانیم جمله ی عمومی دنباله را به صورت زیر بنویسیم

شماره شکل	۱	۲	۳		n
a_n	$(3)^2 - 4$	$(4)^2 - 4$	$(5)^2 - 4$		$(n+2)^2 - 4$

پس جمله ی عمومی این دنباله $a_n = (n+2)^2 - 4$ است. حالا به جایگذاری

$n = 8$ و $n = 9$ در جمله ی عمومی جملات هشتم و نهم رو داریم:

$$a_n = (n+2)^2 - 4$$

$$\begin{aligned} n=8 & \rightarrow a_8 = (8+2)^2 - 4 = 96 \\ n=9 & \rightarrow a_9 = (9+2)^2 - 4 = 117 \end{aligned}$$

پس اختلاف تعداد دایره های شکل هشتم و نهم برابر است با: $117 - 96 = 21$

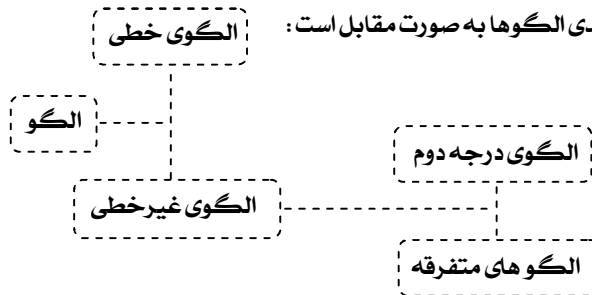




انواع الگو

طبق درسنامه‌ی کتاب درسی سال دهم،

دسته بندی الگوها به صورت مقابل است:



الگوی خطی: هر الگو که جمله‌ی عمومی آن به صورت

$$t_n = an + b \text{ (تغییر ثابت) باشد رايك الگوی خطی می نامیم.}$$

که در آن ضریب n یعنی a میزان تغییر ثابت در هر مرحله است

مثلا در الگوی $1, 5, 9, 13, \dots$ میزان تغییر ثابت و برابر ۴ واحد است. پس

تا اینجا جمله‌ی عمومی آن $t_n = 4n + b$ باید باشد. از طرفی برای بدست

آوردن مقدار b کافیت دقت کنید $t_1 = 1$ است و می‌تونیم بنویسیم:

$$t_1 = 1 \Rightarrow 4(1) + b = 1 \Rightarrow b = -3$$

و جمله‌ی عمومی به صورت $t_n = 4n - 3$ خواهد بود

الگوی غیر خطی: به الگوهایی که میزان تغییرشان در هر

مرحله ثابت نیست، غیر خطی می‌گوییم. مثلا الگوی مربعی

$1, 4, 9, 16, \dots$ غیر خطی است

زیرا میزان تغییر از یک جمله به جمله‌ی بعدی ثابت نیست. مهمترین

الگوی غیرخطی مورد توجه کتاب درسی، الگوی درجه‌ی دوم است

الگوی درجه‌ی دوم: جمله‌ی عمومی این الگو به

$$\text{صورت } t_n = an^2 + bn + c \text{ است.}$$

نکته‌ی مهم در دنباله‌ی درجه دوم آن است که اختلاف جملات متوالی

خود يك دنباله‌ی خطی ایجاد می‌کند که اختلاف آن جملات خطی،

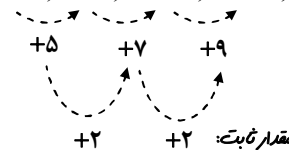
ثابت و برابر $2a$ (دو برابر ضریب n^2) است

مثال ۵: در الگوی درجه‌ی دوم، $3, 8, 15, 24, \dots$ جمله‌ی هشتم را

بیابید؟

پاسخ:

$$3, 8, 15, 24, \dots$$



مقدار ثابت برابر ۲ شد

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

پس ضریب n^2 در عبارت $t_n = an^2 + bn + c$ برابر یک است و اینض ضریب n الگو

برابر است ب: $t_n = n^2 + bn + c$. برای بدست آوردن b و c از جایگذاری دو جمله

استفاده کنیم

$$\begin{aligned} n=1 & \rightarrow 3 = (1)^2 + b(1) + c \Rightarrow 2 = b + c \\ n=2 & \rightarrow 8 = (2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4 = 2b + c \end{aligned}$$

حالا حل دستگاهی:

$$\begin{cases} b + c = 2 \\ 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b - c = -2 \\ 2b + c = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 2, c = 0$$

پس ضریب n در عبارت $t_n = n^2 + 2n$ است و $t_8 = (8)^2 + 2(8) = 80$

الگوهای متفرقه:

در جدول زیر بعضی الگوهایی که کتاب درسی به آن اشاره کرده را آورده ایم

نام دنباله	ویژگی جملات دنباله	جمله‌ی عمومی
دنباله‌ی ثابت	اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، صفر است	$a_n = c$
دنباله‌ی مربعی	هر جمله‌ی آن، مربع شماره‌ی آن جمله است (۱، ۴، ۹، ۱۶، ...)	$a_n = n^2$
دنباله‌ی مکعبی	هر جمله‌ی آن، مربع شماره‌ی آن جمله است (۱، ۸، ۲۷، ۶۴، ...)	$a_n = n^3$
دنباله‌ی نمایی	مثلا جملات دنباله اعداد ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... است که بهتره حفظ باشی	$a_n = 2^n$
دنباله‌ی نوسانی	دنباله‌هایی که جملات آن یکی در میان مثبت و منفی هستند (۱، ۱، -۱، ۱، -۱، ...)	$a_n = (-1)^n$
دنباله‌ی مثلثی	هر جمله‌ی آن برابر مجموع اعداد طبیعی، از یک تا شماره‌ی همان جمله است (۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...)	$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$
دنباله‌ی بازگشتی	بین دو جمله‌ی متوالی یا دویا چند جمله‌ی قبل از آن رابطه‌ی معینی برقرار باشد، دنباله را بازگشتی می‌نامیم	مطالعه آزاد

مثال ۶: جمله‌ی عمومی هر يك از دنباله‌های زیر را به دست آورید

الف) $1, 4, -9, 16, \dots$

پاسخ: همانطور که میبینید جملات دنباله یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند. پس در

جمله‌ی عمومی دنباله، عامل $(-1)^n$ داریم و از طرفی جملات (بدون در نظر گرفتن علامت)

مربع کامل اند. پس جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $a_n = (-1)^n \times n^2$ است

ب) $6, 11, 16, \dots$

پاسخ: این دنباله يك الگوی خطی دارد زیرا در هر مرحله ۵ واحد افزایش می‌یابد.

پس جمله‌ی عمومی آن به صورت $a_n = 5n + b$ است و از طرفی با جایگذاری $a_1 = 6$

مقدار b هم معلوم میشه

$$a_n = 5n + b \Rightarrow a_1 = 5(1) + b \Rightarrow 6 = 5 + b \Rightarrow b = 1$$

پس جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $a_n = 5n + 1$ است

پ) $0/3, -0/03, -0/003, \dots$

پاسخ: در این دنباله رقم اعشار در هر مرحله يك واحد اضافه می‌شود. یعنی جمله‌ی

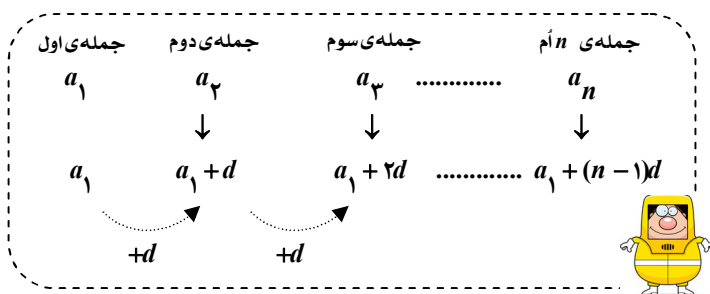
عمومی دارای عامل $(0/1)^n$ است و با توجه به جملات که سه رو تو خودشون دارند، جمله‌ی

عمومی دنباله به صورت $a_n = -3 \times (0/1)^n$

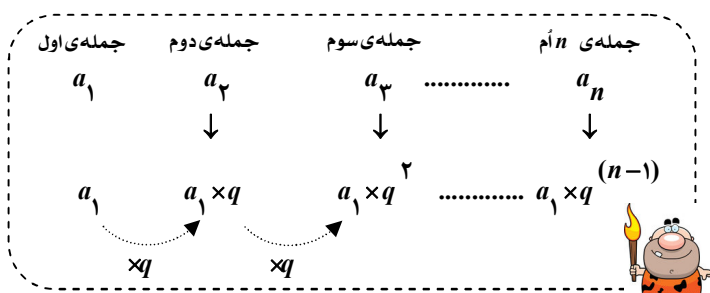


دنباله‌ی حسابی و هندسی

دنباله‌ی حسابی : دنباله‌ای که با جمع کردن بدست می‌آید ، هر جمله با اضافه کردن مقدار ثابت d (قدرنسبت) به جمله‌ی قبلی بدست می‌آید



دنباله‌ی هندسی : دنباله‌ای که با ضرب کردن بدست می‌آید ، هر جمله با ضرب کردن مقدار ثابت q در جمله‌ی قبلی بدست می‌آید .



به عنوان مثال اگر بگه در دنباله‌ی حسابی جمله‌ی پنجم (a_5) ،

باید بگی : $a_5 = a_1 + 4d$

ولی اگه بگه در دنباله‌ی هندسی جمله‌ی پنجم (a_5) ،

باید بگی : $a_5 = a_1 \times q^4$

مثال ۹: در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = 4$ و $a_{n+1} = a_n + 3$ است .

جمله‌ی n ام را بدست آورید

پاسخ : می‌دانیم اختلاف در جمله‌ی متوالی در دنباله‌ی حسابی برابر قدرنسبت است

$$a_{n+1} = a_n + 3 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 3 \Rightarrow d = 3$$

با داشتن قدرنسبت $d = 3$ و جمله‌ی اول $a_1 = 4$ و جایگذاری کن در جمله‌ی عمومی

دنباله‌ی حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ ، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی را می‌نویسیم

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 4 + (n-1)(3) = 3n + 1$$

مثال ۱۰: در یک دنباله‌ی هندسی $a_6 = 8$ و $a_9 = 512$ است .

جمله‌ی n ام را بدست آورید

پاسخ : می‌دانیم در دنباله‌ی هندسی تقسیم جملات قدرنسبت را می‌دهد

$$\frac{a_9}{a_6} = \frac{a_1 \times q^8}{a_1 \times q^5} = q^3 \Rightarrow \frac{512}{8} = q^3 \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$$

با جایگذاری $q = 4$ در یکی از جملات مثل $a_6 = 8$ ، جمله‌ی اول بدست می‌آید

$$a_6 = 8 \Rightarrow a_1 \times q^5 = 8 \Rightarrow a_1 \times 4^5 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{4^5} = \frac{2^3}{2^{10}} = 2^{-7}$$

پس جمله‌ی عمومی به صورت زیر است

$$a_n = a_1 \times q^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 2^{-7} \times 4^{(n-1)} = 2^{-7} \times 2^{2n-2} = 2^{2n-9}$$

VERY IMPORTANT

الگو سازی های مهم کنکوری

اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته ، مجذور کامل باشد:

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), \dots$$

جمله‌ی اول و آخر هر دسته از الگوی زیر پی روی می کند

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16), \dots$$

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد

جملات هر دسته ، برابر شماره‌ی آن دسته باشد

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

جمله‌ی اول و آخر هر دسته از الگوی زیر پی روی می کند

$$(1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), \dots$$

اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات

هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد :

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$$

جمله‌ی اول و آخر هر دسته از الگوی زیر پی روی می کند

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \dots$$

تست ۴: اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد

جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد : $(1), (2, 3), (4, 5, 6), \dots$

آخرین عدد در دسته‌ی بیست ام کدام است؟

$$420 \quad (1) \quad 210 \quad (2) \quad 125 \quad (3) \quad 475 \quad (4)$$

پاسخ :





جمع بندی و مقایسه دو دنباله ی هندسی و حسابی :

توضیح یا کاربرد	دنباله ی عددی	دنباله ی هندسی
جمله ی عمومی	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \times q^{n-1}$
بدست آوردن قدر نسبت وقتی جملات متوالی میدان	تفاضل دو تا جمله ی متوالی $a_{n+1} - a_n = d$	تقسیم دو تا جمله ی متوالی $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
بدست آوردت قدرنسبت وقتی جملات متوالی نمیدن و مثلاً جمله ی a_m و a_n می دن	$a_m - a_n = (m-n)d$	$\frac{a_m}{a_n} = q^{(m-n)}$
اگر داشته باشیم $m+n=r+s$	$a_m + a_n = a_r + a_s$	$a_m \times a_n = a_r \times a_s$
اگر a و b و c سه جمله ی متوالی دنباله باشن داشتیم	$a+c=2b$	$a \times c = b^2$
اگر بخواهیم بین a و b تعداد m تا واسطه درج کنیم داشتیم	$d = \frac{b-a}{m+1}$	$q^{m+1} = \frac{b}{a}$
سه جمله ی متوالی	$a-d, a, a+d$	$\frac{a}{q}, a, aq$

وضعیت یکنوایی دنباله های حسابی و هندسی :

صعودی و نزولی بودن جملات دنباله ی هندسی به قدرنسبت و جمله ی اول وابسته است ولی برای دنباله ی حسابی فقط به قدرنسبت وابسته است

$$\text{دنباله ی حسابی: } \begin{cases} d > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ d = 0 \Rightarrow \text{ثابت} \\ d < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \end{cases}$$

$$\text{دنباله ی هندسی: } \begin{cases} q > 1: \begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ a_1 < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \end{cases} \\ 0 < q < 1: \begin{cases} a_1 > 0 \Rightarrow \text{نزولی} \\ a_1 < 0 \Rightarrow \text{صعودی} \end{cases} \\ q < 0 \Rightarrow \text{غیریکنوا (نه صعودی و نه نزولی)} \end{cases}$$

دنباله ی ثابت تنها دنباله ای است که هم صعودی است و هم نزولی
در دنباله ی حسابی در حالت $d = 0$ دنباله ثابت است و در دنباله ی هندسی در حالت $q = 1$ دنباله ثابت است

ایستگاه آخر ریاضی کنکور

[?] مثال ۱۱: تفاضل جمله ی دهم از جمله ی دوازدهم یک دنباله ی عددی ، ۵ و مجموع دو جمله ی دهم و دوازدهم ۲۵ است. جمله ی بیست و یکم این دنباله کدام است؟

۳۵ (۱) ۲۶ (۲) ۳۷ (۳) ۳۸ (۴)

پاسخ :

$$a_n = a_m + (n-m)d \Rightarrow a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow$$

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{\text{تفاضل درجه ها}}{\text{تفاضل شماره ی جمله ها}}$$

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a_{12} = 15, a_{10} = 10$$

حالا با داشتن دو جمله ، قدرنسبت رو سریع بدست می گیریم:

$$\begin{cases} a_{12} = 15 \\ a_{10} = 10 \end{cases} \rightarrow d = \frac{a_{12} - a_{10}}{12 - 10} = \frac{15 - 10}{2} = 2.5$$

حالا با داشتن یکی از جملات ، جمله ی بیست و یکم را بدست می گیریم ، مثلاً از جمله ی دهم

میریم و جمله ی بیست و یکم رو بدست می گیریم

$$a_{21} = a_{10} + (21-10)d \Rightarrow a_{21} = a_{10} + (11)d$$

$$a_{21} = 10 + (11) \times 2.5 \Rightarrow a_{21} = 37.5$$

[?] مثال ۱۲: اعداد $1-p$ و $5p-1$ و $3p+4$ و $2p+3$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند ، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

پاسخ : اگر a و b و c سه جمله ی متوالی دنباله ی حسابی باشن

$$a+c=2b$$

$$2(3p+4) = (5p-1) + (2p+3) \Rightarrow 6p+8 = 7p+2 \Rightarrow p=6$$

با بدست اومدن $p=6$ جملات دنباله به صورت ۲۹، ۲۲، ۱۵ خواهند بود و قدر

نسبت $d=7$ است

[?] مثال ۱۳: اعداد $1-x$ و $2x+4$ و $2x+3$ به ترتیب جملات سوم ، هفتم و یازدهم یک دنباله ی حسابی باشند ، جمله ی اول دنباله کدام است؟

۱ (۱) $-\frac{13}{2}$ (۲) $\frac{13}{2}$ (۳) -1 (۴)

پاسخ : طبق قاعده ی اندیس ها اگر سه جمله متساوی الفاصله بزرگ بزرگ

صورت رابطه ی قبل رو داریم . یعنی :

$$2a_7 = a_3 + a_{11} \Rightarrow 2(2x+4) = (x-1) + (2x+3) \Rightarrow$$

$$4x+8 = 3x+2 \Rightarrow x = -6$$

با بدست اومدن $x = -6$ جملات دنباله به صورت -7 ، -8 و -9 می بخوریم

می بخوریم

$$a_7 - a_3 = 4d \Rightarrow -8 - (-7) = 4d \Rightarrow d = -\frac{1}{4}$$

با جایگذاری $d = -\frac{1}{4}$ و $a_3 = -7$ داریم :

$$a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow -7 = a_1 + 2(-\frac{1}{4}) \Rightarrow a_1 = -\frac{13}{2}$$





[?] مثال ۱۴: ۲۰۰ قرص نان را بین ۵ نفر چنان تقسیم می کنیم که

سه سهم های دریافت شده، دنباله ی حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر، برابر مجموع دو سهم کوچکتر است. بیشترین تعداد قرص نان دریافتی کدام است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۰

پاسخ: ۵ جمله ی قرائن دنباله ی حسابی:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

طبق صورت تست داریم:

$$(a - 2d) + (a - d) + (a) + (a + d) + (a + 2d) = 200$$

$$\Rightarrow 5a = 200 \Rightarrow a = 40$$

پس جملات دنباله به صورت زیر است:

$$40 - 2d, 40 - d, 40, 40 + d, 40 + 2d$$

خورد تست گفته "یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر، برابر مجموع دو سهم کوچکتر است"

$$\frac{1}{3}((40) + (40 + d) + (40 + 2d)) = (40 - 2d) + (40 - d)$$

$$\frac{1}{3}(120 + 3d) = 80 - 3d \Rightarrow 40 + d = 80 - 3d$$

$$\Rightarrow 4d = 40 \Rightarrow d = 10$$

پس بیشترین قرص نان دریافتی که $a + 2d$ برابر $40 + 2(10) = 60$ است

[?] مثال ۱۵: بین اعداد ۱۲، ۵۲، سه واسطه ی حسابی درج کرده ایم.

مجموع این سه واسطه حسابی چقدر است؟

(۱) ۶۰ (۲) ۶۴ (۳) ۶۸ (۴) ۷۲

پاسخ:

جمله ی پنجم	$m = 3$ واسطه ی حسابی	جمله ی اول
۵۲	?, ?, ?	-۱۲

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{52 - (-12)}{3 + 1} = \frac{64}{4} = 16 \rightarrow$$

$$-12, 4, 20, 36, 52 \xrightarrow{+16, +16, +16, +16} 4 + 20 + 36 = 60$$

محرمانه: یادت باشه در دنباله ی حسابی فرمول a_n بر حسب

n همیشه باید درجه یک باشه و ضریب n قدر نسبت است

[?] مثال ۱۶: اگر $a_n = (p - 1)n^3 + (2p - q)n^2 + 2pn + 3q$

جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی باشد، قدرنسبت کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: اگر جمله ی عمومی داره شده بخواد جمله ی عمومی دنباله ی حسابی باشه

باید ضریب n^3 و n^2 صفر باشه حرف شوند و عبارت درجه یک شود یعنی:

$$\begin{cases} p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \\ 2p - q = 0 \Rightarrow 2(1) - q = 0 \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری $p = 1$ و $q = 2$ در دنباله ی صورت تست جمله ی عمومی به صورت

$$a_n = 2n + 6 \text{ است که قدرنسبت کن ضریب } n \text{ برابر عدد ۲ است}$$

[?] مثال ۱۷: در یک دنباله ی حسابی مجموع سه جمله ی اول ۱۲ و مجموع

جملات پنجم و ششم و هفتم ۱۳۲ است. جمله ی اول کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۱۲ (۳) -۶ (۴) ۴

پاسخ:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_5 + a_6 + a_7 = 132 \end{cases} \xrightarrow{\text{پایین رو از بالا کم می کنیم}}$$

$$(a_5 + a_6 + a_7) - (a_1 + a_2 + a_3) = 132 - 12$$

$$(a_5 - a_1) + (a_6 - a_2) + (a_7 - a_3) = 120 \Rightarrow 4d = 120 \Rightarrow d = 10$$

$$4d \quad 4d \quad 4d$$

به دست آمدن قدرنسبت $d = 10$ و جایگذاری کن در $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 12 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3(10) = 12 \Rightarrow 3a_1 = -18 \Rightarrow a_1 = -6$$

[?] مثال ۱۸: در یک دنباله ی حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_2 = 5 + \sqrt{2}$ است

مجموع چهار جمله ی چهارم چه قدر از مجموع چهار جمله ی دوم بیشتر

است؟

(۱) ۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

پاسخ: اوله قدرنسبت برابر است به:

$$d = a_2 - a_1 = (5 + \sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = 2$$

دوم مجموع چهار جمله ی چهارم $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ و مجموع چهار جمله ی دوم

$(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)$ است. پس مثل تست قبل داریم

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)$$

$$(a_1 - a_5) + (a_2 - a_6) + (a_3 - a_7) + (a_4 - a_8) = 4(-4d) = -16d$$

$$4d \quad 4d \quad 4d \quad 4d$$

مقدار قدرنسبت هم که برابر $d = 2$ بود پس پاسخ برابر است به: $16d = 32$

مثال ۱۹: در دنباله های حسابی "۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ..." و

"۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ..." چند عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از

۳۰۰ موجود است؟ (مسئله ریاضی شاز ۹۵) (آماده باش کنکور ۱۴۰۰)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

پاسخ: قدرنسبت دنباله ی "۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ..." برابر ۷ است و قدرنسبت دنباله

"۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ..." برابر ۵ است. پس قدرنسبت دنباله ی مشترک

برابر ۳۵ است. نقطه میانه اولین جمله ی مشترک که به ادامه دادن جملات اونو می توینیم بینیم

"۲، ۹، ۱۶، ۲۳، ۳۰، ۳۷، ۴۴، ..."

"۱۲، ۱۷، ۲۲، ۲۷، ۳۲، ۳۷، ۴۲، ..."

اولین جمله ی دنباله ی مشترک برابر ۳۷ است

حالا که رقم قدرنسبت جملات جدید و جمله ی اول دنباله ی جملات جدید رو بدیم می توینیم

جمله ی عمومی دنباله ی مشترک رو بنویسیم و هر چی که تست خواسته رو بدست بیاریم

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d \Rightarrow a_n = 37 + (n - 1) \times 35 = 37 + 35n - 35$$

$$\Rightarrow a_n = 35n + 2$$

حالا باید بینیم این دنباله چند عدد سه رقمی مشترک کوچکتر از ۳۰۰ داره

$$100 \leq 35n + 2 < 300 \Rightarrow 98 \leq 35n < 298$$

$$\div 35$$

$$\Rightarrow 2/8 \leq n < 8/51 \Rightarrow n = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$





[?] مثال ۲۰: از قیمت یک اتومبیل هر سال ۲۰ درصد کم می شود . پس

از ۳ سال قیمت اتومبیل چند برابر قیمت اولیه ی آن است ؟

- (۱) ۱۲۸/۰ (۲) ۲۵۶/۰ (۳) ۵۱۲/۰ (۴) ۲۴۳/۰

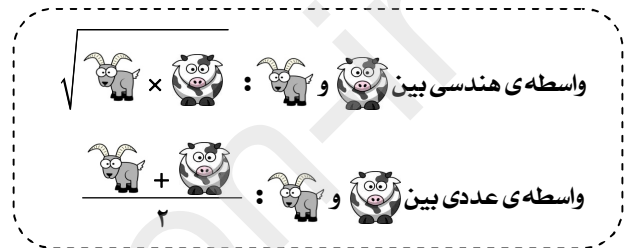
پاسخ: با توجه به این که قیمت اتومبیل هر سال ۲۰ درصد کم می شود. قیمت

اتومبیل ۸۰ درصد قیمت سال قبل است . پس یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت

$q = 0/8$ داریم و با فرض آن که قیمت اولیه a_1 باشد داریم :

$$\frac{a_1 \times q^3}{a_1} = \frac{a_1 \times (0/8)^3}{a_1} = (0/8)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} = 0/1000$$

واسطه ی حسابی و هندسی نوشتن بین دو چیز :



[?] مثال ۲۱: اعداد 3^a و $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله ی متوالی یک دنباله ی

هندسی اند . واسطه ی حسابی بین a و b کدام است ؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۲ (۳) ۱/۵ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: اگر x, y, z سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی باشند آن گاه

$$x \times z = y^2$$

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow$$

$$2^5 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b = 5$$

حالا واسطه ی حسابی بین a و b :

$$\frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2/5$$

[?] مثال ۲۲: در یک دنباله ی هندسی حاصلضرب جملات چهارم و هفتم ،

۱۰ برابر جمله ی پنجم است . اگر جمله ی نهم ۱۰۰۰۰ باشد ، قدر نسبت

کدام است ؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱/۱۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۵

پاسخ:

$$a_4 \times a_7 = 10 \times a_5 \Rightarrow a_1 \times q^3 \times a_1 \times q^6 = 10 \times a_1 \times q^4$$

$$a_1 \times q^5 = 10 \Rightarrow a_6 = 10$$

حالا با تقسیم جمله ی نهم و ششم برهم می توانیم قدر نسبت رو بدست بیاریم

$$\frac{a_9}{a_6} = \frac{a_1 \times q^8}{a_1 \times q^5} = q^3 \Rightarrow \frac{10000}{10} = q^3 \Rightarrow q^3 = 1000 \Rightarrow q = 10$$

[?] مثال ۲۳: چهار عدد مثبت ، جملات متوالی یک دنباله ی هندسی اند .

مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۲۰ و مجموع دو عدد بزرگتر

برابر ۴۵ است . بزرگترین این اعداد کدام است ؟ (سراشری [نسائی خارج ۸۷])

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۰

پاسخ: جملات متوالی رو به صورت $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3$ در نظر بگیریم پس داریم

$$a_1 + a_1q = 20 \Rightarrow a_1(1+q) = 20$$

دو رابطه رو به هم تقسیم می کنیم

$$a_1q^2 + a_1q^3 = 45 \Rightarrow a_1q^2(1+q) = 45$$

$$\Rightarrow \frac{a_1q^2(1+q)}{a_1(1+q)} = \frac{45}{20} \Rightarrow q^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{3}{2}$$

در نت آمده جملات مثبت هندس پس قدر نسبت $q = \frac{3}{2}$ باید مثبت باشد

با جایگذاری q در یکی از دو رابطه با مقدار جمله ی اول رو هم می توانیم بدست بیاریم

$$q = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1(1 + \frac{3}{2}) = 20 \Rightarrow a_1(\frac{5}{2}) = 20 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{5} \times 20 = 8$$

چون $q = \frac{3}{2}$ شد و بزرگتر از عدد ۱ " است پس دنباله ی صعودی است

(در حال افزایش) و بزرگترین جمله ی چهارم است

$$a_4 = a_1q^3 = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 8 \times \frac{27}{8} = 27$$

[?] مثال ۲۴: در یک دنباله ی هندسی حاصلضرب پنج جمله ی اول ۳۲-

و حاصل جمع جملات دوم و چهارم ۵- است قدر نسبت این دنباله کدام

است ؟

- (۱) ۳/۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵/۲

پاسخ: برای راحتی محاسبه جملات رو به صورت زیر در نظر بگیریم

$$a_1q^2 : \text{جمله پنجم و } a_1q : \text{جمله چهارم و } a : \text{جمله سوم و } \frac{a}{q} : \text{جمله دوم و } \frac{a}{q^2} : \text{جمله اول}$$

حاصلضرب پنج جمله ی اول ۳۲- است پس :

$$\frac{a}{q^2} \times \frac{a}{q} \times a \times aq \times aq^2 = -32 \Rightarrow a^5 = -32 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی جمع جملات دوم و چهارم ۵- است . پس داریم :

$$\frac{a}{q} + aq = -5 \xrightarrow{\times q} a + aq^2 = -5q \xrightarrow{a=-2} -2q^2 - 2 = -5q$$

مرتبش کن :

$$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow (q-1)(q-4) = 0$$

$$q = 1, q = 4 \xrightarrow{\div 2} \Rightarrow q = 2, q = \frac{1}{2}$$

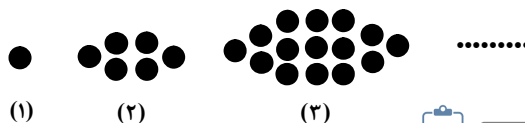
در بین گزینه ها فقط $q = 2$ رو داریم و پاسخ گزینه ی دوم است



تست درمانی:

تست ۱: در الگوی مقابل، شکل هفتم از چند نقطه تشکیل شده است؟ (مشابه سرال سری تبری ۹۸)

۱۲۰ (۱) ۶۶ (۲) ۹۱ (۳) ۵۴ (۴)



مجموع اعداد طبیعی، شروع از ۱ تا n برابر بود: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

رقت: مثلاً مجموع بالا ۵ (۵-۱) برابر است: $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)(n)}{2}$

یا مثلاً ۵ (۵-۲) برابر است: $1 + 2 + \dots + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

و به طور کلی مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

پاسخ:

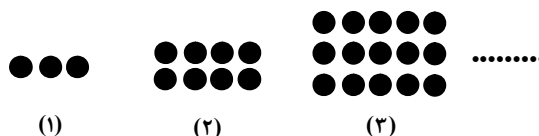
تست ۲: اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره ی آن دسته باشد: $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جمله ی اول و آخر دسته ی سی ام کدام است؟ (سرال سری تبری دلف ۹۴ و ۹۹)

۱۷۰۰ (۱) ۱۷۵۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۱۸۵۰ (۴)



اگر مجموع جملات اول و آخر هر دسته را در نظر بگیریم یک الگو بدست می آید که به این میانه جدول ارزشیابی کرد

تست ۳: در الگوی زیر تعداد دایره ها در شکل هشتم کدام است؟

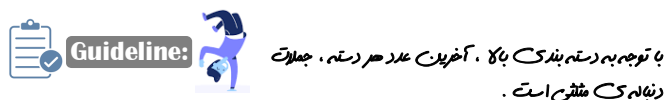


۷۰ (۱) ۸۰ (۲) ۷۵ (۳) ۸۵ (۴)



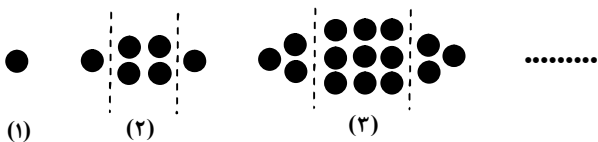
تست ۴: اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره ی آن دسته باشد: $(1), (2, 3), (4, 5, 6), \dots$ آخرین عدد در دسته ی سی ام کدام است؟ (مشابه سرال سری ریاضی دلف ۹۹)

۴۳۵ (۱) ۴۶۵ (۲) ۴۲۵ (۳) ۴۷۵ (۴)



با توجه به دسته بندی بالا، آخرین عدد هر دسته، جملات دنباله ی متناهی است.

پاسخ: برای راحتی شکل را به صورت زیر در ذهن خود دسته بندی کن:



شماره مرحله	a_n
۱	$(1)^2$
۲	$(2)^2 + 2(1)$
۳	$(3)^2 + 2(1+2)$
.....	
n	$(n)^2 + 2(1+2+.....+(n-1))$

پس جمله ی عمومی به صورت زیر است

$$a_n = (n)^2 + 2(1+2+.....+(n-1)) = (n)^2 + 2\left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 + n^2 - n = 2n^2 - n$$

پس شکل هشتم دارای $91 = 2(7)^2 - (7)$ دایره است

پاسخ:

شماره مرحله	۱	۲	۳		n
a_n	$1+1=2$	$3+5=8$	$7+11=18$		$2 \times n^2$

پس جمله ی عمومی دنباله ی مجموع دو جمله ی اول و آخر هر دسته به

صورت $a_n = 2 \times n^2$ است و $1800 = 2 \times (30)^2 = a_{30}$ است

پاسخ:

شماره مرحله	۱	۲	۳		n
a_n	1×3	2×4	3×5		$n \times (n+2)$

پس جمله ی عمومی دنباله $a_n = n \times (n+2) = n^2 + 2n$ است و در نتیجه

$$a_8 = 8^2 + 2(8) = 64 + 16 = 80$$

پاسخ:

..... (۱۰، ۹، ۸، ۷)، (۶، ۵، ۴)، (۳، ۲)، (۱)

جملات دنباله ی متناهی با جمله ی عمومی $a_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ برابر بود: ۱، ۳، ۶، ۱۰،

پس در دسته ی ۳۰ ام، آخرین عدد سی امین عدد در دنباله ی متناهی است

$$a_{30} = \frac{30 \times (31)}{2} = 465$$





پاسخ:

$$x^2 - mx + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

پس جملات به صورت ۴، m و ۲ است

$$4 + 2 = 2m \Rightarrow m = 3$$

تست ۵: اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله $x^2 - mx + 2 = 0$ و اعداد

۴ و $x_1 + x_2$ و $x_1 \cdot x_2$ تشکیل دنباله ی حسابی دهند. آن گاه مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹



Guideline:



در معادله ی درجه ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر ریشه ها x_1 و x_2 بودند آن گاه مجموع دو ریشه و حاصل ضرب دو ریشه از روی ضرایب برابر بود:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

پاسخ:

اولین عدد بزرگتر از ۱۰۰ و مضرب (بخش پذیر) بر ۶ عدد ۱۰۲ و قبل از ۲۰۰ عدد ۱۹۸ است

جمله ی n ام a_n جمله ی اول a_1
۱۹۸ ، ، ۱۱۴ ، ۱۰۸ ، ۱۰۲

از طرفی رابطه ی بین جمله ی اول و آخر دنباله ی حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بود

$$198 = 102 + (n-1) \times 6 \rightarrow 198 - 102 = 6n - 6 \rightarrow$$

$$96 = 6n - 6 \rightarrow 96 + 6 = 6n \rightarrow 102 = 6n \Rightarrow n = \frac{102}{6} = 17$$

پاسخ:

$$\left(\frac{a}{q}\right) \times (a) \times (aq) = 216 \rightarrow a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{a}{q} + a + aq = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19$$

$$\Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 13 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q^2 = 13q$$

$$6q^2 - 13q + 6 = 0 \Rightarrow q^2 - 13q + 36 = 0 \Rightarrow (q-9)(q-4) = 0$$

$$q = 9, q = 4 \xrightarrow{\div 6} \Rightarrow q = \frac{2}{3}, q = \frac{3}{2}$$

$$\text{if : } \frac{a=6}{q_1=\frac{2}{3}} \rightarrow \frac{6}{\frac{2}{3}}, 6, 6\left(\frac{3}{2}\right) = 9, 6, 9$$

$$\text{if : } \frac{a=6}{q_1=\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}, 6, 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4, 6, 4$$

پس تفاضل بیشترین و کمترین مقدار ۵ است

تست ۶: تعداد اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و

۲۰۰ کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۱۶



Guideline:



عددی بخش پذیر (مضرب) ۱۶ است که بر ۲ بخش پذیر (زوج باشد) باشد و بر ۳ هم بخش پذیر باشد

تست ۷: در یک دنباله ی هندسی مجموع سه جمله ی متوالی ۱۹ و

حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷



Guideline:



سه عدد متوالی در دنباله ی عددی: $a-d, a, a+d$

سه عدد متوالی در دنباله ی هندسی: $\frac{a}{q}, a, aq$

این دو تا تست همه اون مناسبه ای که طراح برای پرورش تست (نیاز) داره رو دافله فودشون دارن
مثلا تشخیص جملات توان رسانی حل معادله و تشخیص تفاضل و چون
میده برای کنکور

پاسخ:

جمله ی سوم a_3 جمله ی هفتم a_7 جمله ی نهم a_9
 $a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d$

$$(a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) \Rightarrow$$

$$(a_1^2 + 12a_1d + 36d^2) = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$$

$$2a_1d + 20d^2 = 0 \rightarrow 2d(a_1 + 10d) = 0 \xrightarrow{\div 2d} a_1 + 10d = 0$$

جمله ی یازدهم

تست ۸: در یک دنباله ی عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می توانند سه

جمله ی متوالی از دنباله ی هندسی باشند. چندمین جمله ی این دنباله، صفر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲



Guideline:



مع دانیم برای سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی، توان دوم جمله ی وسطی برابر حاصل ضرب دو جمله ی کناری است





تست ۹: در یک دنباله هندسی، جمله ی دوم و دو برابر جمله ی پنجم و جمله ی هشتم می توانند سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند. بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچک ترین آنهاست؟

$$(1) \quad 2 + \sqrt{3}$$

$$(2) \quad 5 + 2\sqrt{3}$$

$$(3) \quad 5 + 4\sqrt{3}$$

$$(4) \quad 7 + 4\sqrt{3}$$

طراح این تست یک نابغه بوده!

بین چند تا موضوع رو باهم پرمیخته پنج تا موضوع رو آورده در حل یک تست

تدلیلی این تست رو حل کنی و به ذهنت بسپاری برد کردی!

تست ۱۰: بین دو عدد ۱۵ و ۴۰۵ چند واسطه ی هندسی با قدر نسبت $\sqrt[3]{3}$ می توان درج کرد؟

$$(1) \quad 6$$

$$(2) \quad 7$$

$$(3) \quad 8$$

$$(4) \quad 9$$



Guideline:



تقسیم اگر بین دو عدد a و b بخواهیم تعداد m واسطه هندسی درج کنیم

$$\text{رابطه ی } q^{m+1} = \frac{b}{a} \text{ استفاده می کنیم}$$

تست ۱۱: در یک دنباله ی عددی، جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی صعودی اند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟ (مراهری ۷۳ دافل - ۸۱ دافل - ۸۲ فارغ - ۸۸ دافل و ۹۹ و ۹۹)

$$(1) \quad \frac{6}{5}$$

$$(2) \quad \frac{5}{4}$$

$$(3) \quad 2$$

$$(4) \quad \frac{3}{2}$$



Guideline:



محرمانه ی تستی طوری: اگر a_m و a_n و a_p سه جمله ی رتبه از یک دنباله ی حسابی باشند ($m > n > p$) که اتفاقاً سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند.

$$\text{قدر نسبت دنباله ی هندسی از رابطه ی } \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_p}{a_n} \text{ می آید: } q = \frac{m-n}{n-p}$$

(احتمالی کنکور ۱۴۰۰)

تکرار این تست و تست ۹ در کنکور خیلی زیاد بوده حواستو جمع کن

پاسخ:

دو برابر
جمله ی هشتم
جمله ی پنجم
جمله ی دوم

$$a_8, 2a_5, a_2$$

مع دانیم برای سه جمله ی دنباله ی حسابی، دو برابر جمله ی وسط برابر مجموع دو جمله ی کناری بود

$$a_2 + a_8 = 2(2a_5) \Rightarrow a_2 q + a_2 q^7 = 4(a_2 q^4)$$

$$a_2 q(1 + q^6) = 4a_2 q(4q^3) \Rightarrow q^6 + 1 = 4q^3$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

تجزیه ی معادله ی درجه دوم بدست آمده امکان پذیر نیست و اونو از طریق روش ده حل می کنیم

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 12 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{12}}{2(1)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow t_1, t_2 = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{q^3 = t} q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

حالا نسبت بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچک ترین آنها:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_2 q^7}{a_2 q} = q^6 = (q^3)^2 = (2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

پاسخ:

$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \rightarrow (\sqrt[3]{3})^{m+1} = \frac{405}{15} \rightarrow (\sqrt[3]{3})^{m+1} = 27$$

$$\rightarrow 3^{\frac{1}{3}m + \frac{1}{3}} = 3^3 \rightarrow \frac{1}{3}m + \frac{1}{3} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}m + \frac{1}{3} = 3 \xrightarrow{\times 3} m + 1 = 9 \Rightarrow m = 8$$

پاسخ:

جمله ی پنجم
جمله ی یازدهم
جمله ی اول

$$a_1, a_1 + 4d, a_1 + 10d$$

رابطه ی سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی رو بنویسیم

$$(a_1 + 4d)^2 = (a_1)(a_1 + 10d) \Rightarrow$$

$$(a_1^2 + 8a_1d + 16d^2) = a_1^2 + 10a_1d$$

$$-2a_1d + 16d^2 = 0 \rightarrow -2d(a_1 - 8d) = 0 \xrightarrow{\div (-2d)}$$

$$a_1 - 8d = 0 \Rightarrow a_1 = 8d$$

حالا در مرحله ی بعدی جملات رو بر حسب d می نویسیم و قدر نسبت براهن بدست می آید

$$a_1 = 8d$$

$$a_1, a_1 + 4d, a_1 + 10d \rightarrow 8d, 8d + 4d, 8d + 10d$$

$$8d, 12d, 18d \Rightarrow q = \frac{12d}{8d} = \frac{3}{2}$$

تستی طوری:

$$q = \frac{m-n}{n-p} = \frac{11-5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$





پاسخ:

تست ۱۲: به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ ، $x^2 + 4$ ، به ترتیب سه جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی هندسی نزولی اند. مجموع این سه جمله‌ی دنباله، کدام است؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

$$x^2 - 2, 2x, x^2 + 4$$

می‌دانیم برای سه جمله‌ی شوال یک دنباله‌ی هندسی، مربع جمله‌ی وسط برابر حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری است

$$\Rightarrow (2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8$$

مرتبتش کن:

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad x^2 = t \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4 & \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ t = -2 & \Rightarrow x^2 = -2 \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 & \xrightarrow{x^2 + 4, 2x, x^2 - 2} 8, 4, 2 \quad \text{نزولی} \\ x = -2 & \xrightarrow{x^2 + 4, 2x, x^2 - 2} 8, -4, 2 \quad \text{نه صعودی و نه نزولی} \end{cases}$$

پس $x = 2$ قابل قبول است و مجموع سه عدد بدست آمده $8 + 4 + 2 = 14$ است

پاسخ:

تست ۱۳: در دنباله‌ی اعداد $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، $a_1 = 1$ جمله‌ی دهم

کدام است؟ (سرهمری انسانی خارج ۹۴ و سرهمری تقریبی داخل ۹۵)

۹۷۹ (۱) ۹۸۷ (۲) ۱۰۱۵ (۳) ۱۰۲۳ (۴)

مطالعه آزاد

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} n=1 & \rightarrow a_2 = 2a_1 + 1 \rightarrow a_2 = 2(1) + 1 = 3 \\ n=2 & \rightarrow a_3 = 2a_2 + 1 \rightarrow a_3 = 2(3) + 1 = 7 \\ n=3 & \rightarrow a_4 = 2a_3 + 1 \rightarrow a_4 = 2(7) + 1 = 15 \\ n=4 & \rightarrow a_5 = 2a_4 + 1 \rightarrow a_5 = 2(15) + 1 = 31 \end{aligned}$$

با دقت در جملات متوجه می‌شویم، جمله‌ی عمومی دنباله به صورت: $a_n = 2^n - 1$

پس جمله‌ی دهم به صورت: $a_{10} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ است

پاسخ:

تست ۱۴: در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم:

$a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_7$ کدام است؟ (سرهمری تقریبی خارج ۹۵)

۳۲ (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴)

مطالعه آزاد

ابتدا چند جمله‌ی اول دنباله را به دست می‌آوریم تا به جمله‌ی هشتم و نهم برسیم

$$\begin{aligned} n=2 & \rightarrow a_2 = 2a_1 - 2 \rightarrow a_2 = 2(3) - 2 = 4 \\ n=3 & \rightarrow a_3 = 2a_2 - 2 \rightarrow a_3 = 2(4) - 2 = 6 \\ n=4 & \rightarrow a_4 = 2a_3 - 2 \rightarrow a_4 = 2(6) - 2 = 10 \\ n=5 & \rightarrow a_5 = 2a_4 - 2 \rightarrow a_5 = 2(10) - 2 = 18 \end{aligned}$$

دنباله‌ی به وجود آمده به صورت $3, 4, 6, 10, 18, \dots$ است که افزایش جملات به صورت زیر است

$$3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130, \dots$$

$$\begin{aligned} & \quad +2 \quad +4 \quad +8 \quad +16 \quad +32 \quad +64 \end{aligned}$$

$$a_8 - a_7 = 130 - 66 = 64 \quad \text{و داریم}$$

