

به نام خدا

ترکیبات دوازدهم

خسرو ایزدی

جایگشت های با تکرار.

به طور کلی اگر n شیء موجود باشند که a تای آنها یکسان، b تای دیگر یکسان، c تای دیگر یکسان و آن گاه تعداد جایگشتهای n شیء که همه با هم در نظر گرفته شوند برابر است با $\frac{n!}{a!b!c!....}$ که در آن $n = a + b + c +$

مثال ۱. چند جایگشت از حروف کلمه Mississippi وجود دارد؟

$$\frac{11!}{1! \times 4! \times 4! \times 2!} \text{ پاسخ}$$

مثال ۲. چند عدد ۳ رقمی با سه تا از ارقام عدد ۴۴۳۳۲۲ می توان نوشت؟

پاسخ. قدم اول. عدد شامل ۲ و ۳ و ۴ باشد که ۳! جایگشت دارند.

قدم دوم. عدد شامل دو تا ۴ باشد. در این صورت یا با یک عدد ۳ همراه است یا با یک عدد ۲، که در هر

دو حالت $\frac{3!}{2!1!}$ جایگشت دارند پس در این قدم $2 \times \frac{3!}{2!1!}$ جایگشت داریم.

قدم سوم. تکرار قدم دوم برای دو تا ۳ و دو تا ۲. لذا پاسخ بصورت $24 = 2 \times \frac{3!}{2!1!} + C(3,1) \times \frac{3!}{2!1!}$ می باشد.

تمرین. چند عدد سه رقمی با سه تا از ارقام عدد ۱۱۲۲۳۰۰ میتوان نوشت؟

مثال ۳. تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم ۵ و حداقل یک رقم ۲ را شامل شود کدام است؟ (کنکور

۹۸ خارج از کشور)

(۱) ۵۲ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۵۸

پاسخ. چهار حالت در نظر می گیریم.

اول. در کنار ۵۲ رقم صفر وجود دارد که با ۵۲ و ۰ چهار عدد سه رقمی وجود دارد.

دوم. در کنار ۵۲ رقمی بجز ۵۲ قرارداد (۷ رقم) که مجموعاً $42 = 3! \times 7$ حالت می شود.

سوم. در کنار ۵۲ رقم ۵ قرار دارد که جایگشت با تکرار داریم $3 = \frac{3!}{2!1!}$ را داریم.

چهارم. در کنار ۵۲ رقم ۲ قرار دارد که جایگشت با تکرار داریم $3 = \frac{3!}{2!1!}$ را داریم.

لذا مجموع ۴ حالت برابر با ۵۲ می شود.

معادله های خطی با ضرایب واحد.

- تعداد جواب های $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ از معادله $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = m$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت برابر است با:

$$c(m-1, k-1)$$

- تعداد جواب های $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ از معادله $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = m$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی برابر است با

$$c(m+k-1, k-1)$$

مثال ۴. تعداد جملات در بسط $(a+b+c)^{12}$ چند تاست؟ (کنکور سراسری ۹۹)

$$91(4)$$

$$84(3)$$

$$78(2)$$

$$72(1)$$

پاسخ. جملات به شکل $a^x b^y c^z$ هستند که $x+y+z=12$ و $x, y, z \geq 0$ پس پاسخ تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله $x+y+z=12$ یعنی $c(14, 2) = 91$ می باشد.

معادله های با جواب های مشروط.

- تعداد جوابهای صحیح معادله $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = m$ در شرایط $X_1 > c_1, X_2 > c_2, \dots, X_k > c_k$ صدق می کنند برابر است با:

$$c(m - c_1 - c_2 - c_3 - \dots - c_k - 1, k - 1)$$

مثال ۵. به چند طریق میتوان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد بطوریکه هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (سراسری ۹۸)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۲۰

پاسخ. در واقع مسئله یافتن تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ می باشد. لذا پاسخ $c(10, 4) = 210$ است.

.....

مثال ۶. به چند طریق میتوان از بین ۴ نوع گل ۱۵ شاخه انتخاب کرد بطوریکه از هر نوع آن حداقل ۲ شاخه انتخاب شود؟ (کنکور ۹۸ خارج از کشور)

- (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۱۵۰

پاسخ. مسئله یافتن تعداد جوابهای صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ می باشد با شرط $x_1 > 1, x_2 > 1, x_3 > 1, x_4 > 1$ لذا پاسخ $c(10, 3) = 120$ است.

.....

مثال ۷. تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x + y + z + t = 11$ به شرط آنکه $x < 5$ کدام است؟ (کنکور سراسری ۹۹ خارج از کشور)

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۲۲۰ (۳) ۲۷۰ (۳) ۲۸۰

پاسخ. ابتدا تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله را به دست می آوریم سپس تعداد حالاتی را که $x \geq 5$ است (که برابر با جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x + y + z + t = 6$ می باشد) از آن کم میکنیم. لذا پاسخ برابر است با: $c(14, 11) - c(9, 3) = 280$

اصل شمول و عدم شمول.

فرض کنید N شیء داریم که برخی از این اشیاء دارای ویژگی α هستند و $N(\alpha)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای ویژگی α هستند. به همین ترتیب فرض کنید بعضی از این اشیاء دارای ویژگی β هستند و بعضی این ویژگی را ندارند. فرض کنید $N(\beta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای ویژگی β هستند و γ ویژگی دیگری از اشیاء با تعداد $N(\gamma)$ باشد. فرض کنیم $N(\alpha, \beta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای دو ویژگی α, β هستند و $N(\alpha, \beta, \gamma)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای سه ویژگی α, β, γ هستند. حال فرض کنیم این سوالات مطرح است:

- چند تا از N شیء ویژگی α را ندارند؟ با یک تفریق ساده پاسخ $N - N(\alpha)$ خواهد بود.

- چند شیء هیچ یک از ویژگیهای α, β را ندارند؟ پاسخ برابر است با $N - N(\alpha) - N(\beta) + N(\alpha, \beta)$

- چند شیء هیچ یک از ویژگیهای α, β, γ را ندارند؟ پاسخ برابر است با

$$N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) + N(\alpha, \beta) + N(\alpha, \gamma) + N(\beta, \gamma) - N(\alpha, \beta, \gamma)$$

مثال ۸. ارقام ۱ و ۲ و ۳ چند جایگشت دارند بطوریکه هیچکدام سر جای خود قرار نگیرند؟

پاسخ: تعداد جایگشت های سه عدد بدون هیچ شرطی برابر $3!$ است. تعداد جایگشتهایی که ۱ سر جای خود قرار دارد $2! = (3-1)!$ است که باید کسر گردد. برای ارقام ۲ و ۳ نیز همین عدد کسر می گردد. اکنون تعداد جایگشتهایی که ۱ و ۲ سر جای خود قرار دارند باید اضافه گردد که برابر $1! = (3-1-1)!$ می باشد و همین عدد در مورد ۱ و ۲ و ۳ همچنین ۲ و ۳ اضافه می گردد و در پایان تعداد جایگشتهایی که ۱ و ۲ و ۳ سر جای خود قرار دارند کسر می گردد پس به طور خلاصه پاسخ نهایی بصورت:

$$3! - C(3,1).2! + C(3,2).1! - C(3,3).0! = 2$$

خواهد بود.

مثال ۹. تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۶ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی کدام است؟ (سراسری ۹۹)

$$540(4)$$

$$480(3)$$

$$450(2)$$

$$360(1)$$

پاسخ. اگر مجموعه ۶ عضوی را A و مجموعه سه عضوی را B بنامیم ابتدا تعداد کلیه توابع را از A به B حساب میکنیم که برابر 3^6 می شود زیرا هر عنصر در A برای رفتن به B سه انتخاب دارد. حال تعداد توابع غیر پوشا را کم میکنیم.

توابع غیر پوشا حالتی است که عنصری در B خالی مانده باشد یعنی همه عناصر A به دو عضو دیگر B رفته باشند که تعداد آنها 2^6 می باشد و کسر می گردد و چون این عنصر در B هر عنصر می تواند باشد لذا سه انتخاب دارد پس عدد $2^6 \times C(3,1)$ کسر می گردد. اما حالتی که دو عنصر B همزمان خالی باشند اضافه می گردد یعنی $1^6 \times C(3,2)$ و حالتی که هر سه عنصر B خالی باشند کسر می گردد که صفر است پس تعداد توابع پوشا برابر است با: $3^6 - C(3,1)2^6 + C(3,2)1^6 - C(3,3)0^6 = 540$

مربع های لاتین

تعریف مربع لاتین. چنانچه یک مربع $N \times N$ را با اعداد $1, 2, 3, \dots, N$ به گونه ای پر کنیم که در هر سطر و در هر ستون مربع، اعداد $1, 2, 3, \dots, N$ همگی موجود باشند، مربع حاصل را مربع لاتین و به هر یک از اعداد درون مربع یک درایه می گوئیم.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

مثال ۱۰. A یک مربع لاتین 3×3 است.

– نکته. برای هر عدد N حداقل یک مربع لاتین $N \times N$ وجود دارد.

– نکته. می توان با اعمال جایگشت روی اعداد $1, 2, 3, \dots, N$ از یک مربع لاتین، مربع لاتین جدید به دست آورد.

مثال ۱۱. اگر A یک مربع لاتین 3×3 باشد با اعمال جایگشت روی اعداد $1, 2, 3$ چند مربع لاتین جدید به دست می آید؟

پاسخ. برای اعداد $1, 2, 3$ به تعداد $3! = 6$ جایگشت داریم لذا $3! - 1 = 5$ جایگشت متفاوت از جایگشت اولیه وجود دارد که به ازای هر کدام یک مربع لاتین جدید به دست می آید.

دو مربع لاتین متعامد.

دو مربع لاتین و هم مرتبه B, A را متعامد گوییم هرگاه از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر آنها در یک مربع جدید، عددهای دو رقمی تشکیل شده متفاوت باشند.

مثال ۱۲. B, A متعامد هستند زیرا درایه های C اعداد دو رقمی متفاوتی هستند.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳۲ & ۲۱ & ۱۳ \\ \hline ۲۳ & ۱۲ & ۳۱ \\ \hline ۱۱ & ۳۳ & ۲۲ \\ \hline \end{array}$$

A بدین صورت است که اگر دو درایه در مربع B, A - یک روش تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین درایه های B, A یکسان نباشند. مثلاً برای متعامد بودن B یکسان باشند درایه های نظیر آن دو در مربع نباید یکسان باشند. B ستاره دار در مربع

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & b & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & b & \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \star & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \star & \\ \hline \end{array}$$

نکته. اگر B از اعمال جایگشت روی اعضای مربع لاتین A به دست آید، دو مربع لاتین B, A متعامد نیستند زیرا اگر دو درایه در A یکسان باشند با اعمال جایگشت روی آنها در B نیز مساوی می گردند.

نکته. اگر B, A دو مربع لاتین متعامد باشند و B' مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی اعضای B باشد، A و B' نیز متعامدند زیرا اگر دو درایه در B' مساوی باشند درایه های نظیر در B نیز مساوی هستند. اکنون با توجه به متعامد بودن B, A این دو درایه در A نیز مساوی هستند.

نکته. دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود ندارد. به طور کلی اگر $N \neq 1, 2, 6$ باشد همواره دو مربع لاتین متعامد از مرتبه N وجود دارد و برای $N = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه N وجود ندارد.

نکته. اگر B از جابجا نمودن سطرها یا مربع لاتین A به دست آید نمی توان در مورد متعامد بودن و یا نبودن B, A اظهار نظر نمود.

مثال ۱۳. تعداد مربع های لاتین متعامد با مربع لاتین A کدام است؟ (تست کنکور

سراسری ۹۸)

$A =$

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

پاسخ. اگر فرض کنیم B ماتریس متعامد A است، چون درایه های نظیر

c, b, a در A همگی مساوی ۲ هستند، لذا c, b, a در B متمایزند.

		a
	b	★
c		

$B =$

از طرفی درایه در B ، a یا b نمی تواند باشد چون هم

ستون با a و هم سطر با b است پس c می باشد. با این روش

b	c	a
a	b	c
c	a	b

می آید. چون $3! = 6$ حالت برای c, b, a

شده یک مربع لاتین یکتای B به ما

B به صورت یکتا و به شکل بدست

وجود دارد و هر کدام به روش ذکر

میدهد، لذا ۶ مربع لاتین متعامد بر A به دست می آید.

اصل لانه کبوتری.

اگر $n+1$ کبوتر به سمت n لانه پرواز کنند حداقل یکی از لانه ها شامل دو یا چند کبوتر است.

مثال ۱۴. حداقل چند عدد از مجموعه اعداد طبیعی متوالی $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ انتخاب شود تا مطمئن باشیم بین آنها حداقل دو عدد با مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از یک ، وجود دارد؟ (کنکور سراسری ۹۹ خارج از کشور)

۱۰(۴)

۱۱(۳)

۱۲(۲)

۱۳(۱)

پاسخ.مجموعه اعداد اول از ۱ تا ۳۰ ده عضو دارد که به همراه عدد ۱ ، یک مجموعه یازده عضوی داریم که هیچ مقسوم علیه مشترکی به جز ۱ ندارند. اکنون هر عضو جدید که به این مجموعه اضافه شود حداقل دارای یک مقسوم علیه مشترک بزرگ تر از ۱ با یکی از این اعداد است. لذا پاسخ صحیح گزینه ۲ می باشد.