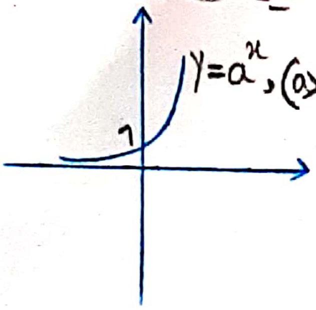
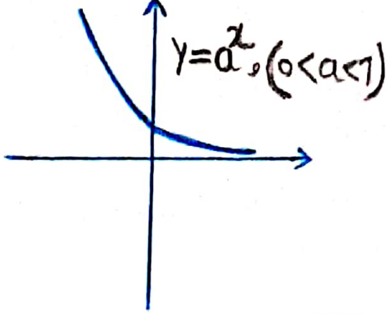
نکته های تستی مبحث "کاربرد های مشتق"

① : نمودار تابع نمایی $y=a^x$ در دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ به صورت زیر است:





② : فرض کنید تابع در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت:

آ) اگر برای هر $x\in[a,b]$ ، $f'(x)>0$ ، آن‌گاه تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

ب) اگر برای هر $x\in[a,b]$ ، $f'(x)<0$ ، آن‌گاه تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

③ : برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع f ، f' را محاسبه کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

④ : فرض کنید تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و روی بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد. اگر برای هر $x\in[a,b]$ ، $f'(x)\geq 0$ (یا $f'(x)\leq 0$) و تعداد ریشه‌های f' متناهی و یا حتی نامتناهی و مجزا از یکدیگر باشند، آن‌گاه تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) است.

⑤ : شرط آنکه تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ روی بازهٔ I همواره نزولی باشد آن است که اولاً $ad-bc<0$ و ثانیاً مجانب قائم تابع متعلق به بازهٔ I نباشد.

⑥ : اگر تابع f در نقاط درونی بازهٔ I دارای مجانب قائم باشد، آن‌گاه در این بازه غیریکنوا است.

بدیهی است در بخش های از بازهٔ I که مجانب قائم حضور ندارد، تابع f می‌تواند یکنوا باشد.

⑦: اگر نمودار تابع f را در اختیار داشته باشیم، نقاط زیر در صورتی که به نقاط درونی دامنه f تعلق داشته باشند، بحرانی اند:

1) نقاط ناپیوسته　　　2) نقاط گوشه‌ای و بازگشتی

3) نقاط با مماس قائم　　　4) نقاط با مماس افقی

---

⑧: اگر تابع f روی بازهٔ I پیوسته و نمودار نمودار تابع f' را در این بازه داشته باشیم، نقطهٔ درونی به طول $x=a$ $(a\in I)$ طول نقطهٔ بحرانی تابع f است هرگاه یکی از حالت های زیر رخ می دهد:

1) نمودار f' در $x=a$ محور x ها را قطع کند.

2) نمودار f' در $x=a$ پرش داشته باشد.

3) نمودار f' در $x=a$ دارای مجانب قائم باشد.

---

⑨: برای یافتن نقاط بحرانی توابع چندضابطه‌ای و بدون قدرمطلق و براکت از روی ضابطهٔ آن ها، درصورتی که تابع نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشد، آن ها را یافته و سپس از تابع مشتق گرفته و ریشه‌های صورت و مخرج آن را بدست می‌آوریم. اگر نقاط به دست آمده، نقاط درونی دامنهٔ تابع باشند، بحرانی هستند.

---

⑩: اگر g تابعی مشتق پذیر باشد، نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|g(x)|$ از حل معادلات $g(x)=0$ و $g'(x)=0$ به دست می‌آیند.

---

⑪: نقاط بحرانی تابع $y=g(x)|f(x)|$ که در آن f و g توابعی مشتق پذیر هستند، از حل معادلات $f(x)=0$ و $(f.g)'(x)=0$ به دست می‌آیند.

---

⑫: نقطه‌ای روی نمودار تابع f که عرض آن نقطه از عرض بقیه نقاط روی نمودار کمتر (بیش‌تر) باشد، نقطهٔ ماکسیمم مطلق (یا مینیمم مطلق) نام دارد.

---

⑬: (قضیهٔ وجود اکسترمم های مطلق): اگر تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن گاه در این بازه هم ماکسیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

۱۴: اگر تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، برای تعیین مقادیر اکسترمم های مطلق آن، ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را در این بازه می‌یابیم. سپس عرض نقاط بحرانی و نیز $f(a)$ و $f(b)$ را بدست می آوریم. از بین مقادیر بدست آمده، بیشترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار، مینیمم مطلق می باشد.

۱۵: اکسترمم مطلق تابع پیوسته f را هنگامی که بازه‌ای برای آن داده نشده باشد، روی دامنه‌اش تعیین می کنیم. همچنین اگر حداقل یک طرف دامنهٔ f نامتناهی $(-\infty, \infty)$ باشد، به‌جای یافتن مقادیر تابع در ∞ یا $-\infty$، حاصل $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ یا $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ را می یابیم.

۱۶: برای یافتن مقادیر اکسترمم مطلق تابع f روی بازهٔ I، وقتی تابع f در این بازه ناپیوسته است، بهتر است نمودار تابع را در این بازه رسم کنیم.

۱۷: برای یافتن اکسترمم مطلق توابع به شکل $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ یا $(y=a\cos^2x+b\cos x+c)$ اعداد ۱، ۱- و $-\frac{b}{2a}$ $\left(-1\leqslant -\frac{b}{2a}\leqslant 1\right)$ را به جای $\sin x$ (یا $\cos x$) قرار می دهیم. بیشترین مقدار، ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار مینیمم مطلق است.

۱۸: اگر $a,b>0$، آنگاه: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

۱۹: فرایند حل مسائل بهینه سازی به کمک مشتق به صورت زیر است:

1) درصورت لزوم شکلی برای مسئله رسم می کنیم.

2) کمیتی که قرار است ماکسیمم یا مینیمم شود را به صورت معادله‌ای از متغیرها می نویسیم (معادلهٔ هدف)

3) اگر معادله هدف یک متغیره نبود، به کمک روابط بین متغیرها (معادلهٔ کمکی) آن را یک متغیره می نامیم.

4) از معادلهٔ هدف یک متغیره مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار داده و حاصل را در معادلهٔ هدف قرار می دهیم.

- اگر x و y مثبت و $x+y=k$ (ثابت)، آنگاه $x^{\alpha}y^{\beta}$ وقتی ماکسیمم است که: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}$

20: اگر x، y، a و b اعداد مثبت و (ثابت) $ax+by=k$، آن‌گاه xy وقتی ماکسیمم است که $ax=by=\frac{k}{2}$

21: (نامساوی کوشی - شوارتز) اگر a، b، x و y اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

22: اگر x و y مثبت و $xy=k$ $(k>0)$ (k ثابت)، آن‌گاه مقدار $x+y$ وقتی مینیمم است که $x=y=\sqrt{k}$

23: فرض کنید $c \in D_f$ و تابع f در یک همسایگی c تعریف شده باشد، در این صورت:

1) اگر برای هر x در این همسایگی داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، آن‌گاه طول نقطهٔ $x=c$ ماکسیمم نسبی f است.

2) اگر برای هر x در این همسایگی داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، آن‌گاه طول نقطهٔ $x=c$ مینیمم نسبی f است.

24: همهٔ ریشه‌های ساده یا مکرر فرد صورت و مخرج تابع f' به شرط آنکه تابع f در همسایگی آن‌ها تعریف شده باشد، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند.

25: معادلات $\sin u=k$ / $\cos u=k$ فقط وقتی ریشهٔ مضاعف دارند که $k=\pm 1$

26: اگر تابع f پیوسته و تعداد نقاط اکسترمم نسبی آن زوج باشد، آن‌گاه نیمی از آن‌ها ماکسیمم نسبی و نیم دیگر مینیمم نسبی‌اند.

27: برای تعیین نوع نقطهٔ اکسترمم نسبی (ماکسیمم یا مینیمم) از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.

28: اگر $A(\alpha,\beta)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f و تابع f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

آ) مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ تابع صدق می‌کند. یعنی $f(\alpha)=\beta$

ب) $f'(\alpha)=0$

29: اگر $A(\alpha,\beta)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع کسری f و f در نقطهٔ A مشتق باشد، آن‌گاه مختصات نقطهٔ هم در خود تابع و هم در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

30: اگر تابع f روی R پیوسته بوده و نمودار f' را در اختیار داشته باشیم، نقاطی که نمودار f' محور xها را قطع کرده و از آن عبور می‌کند، یا نقاطی که نمودار f' از محور xها پرش داشته باشد و یا مجانب قائم ساده f'، نقاط اکسترمم نسبی f خواهند بود.

31: در تابع به‌صورت $f(x)=|x-a|g(x)$ که در آن $g(a)\neq 0$ و g در همسایگی $x=a$ مشتق‌پذیر است، نقطه به طول $x=a$، اکسترمم نسبی تابع f است. علاوه بر آن اگر $g(a)>0$، آن‌گاه $x=a$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی و چنانچه $g(a)<0$، آن‌گاه $x=a$ طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی f است.

32: در تابع پیوسته f، در نقطهٔ اکسترمم نسبی، مشتق تغییر علامت می‌دهد، بنابراین در تابع مشتق آن یعنی f'، در هر نقطه‌ای که نمودار مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت دهد آن نقطه ماکزیمم نسبی تابع f و در هر نقطه‌ای که نمودار مشتق از منفی به مثبت تغییر علامت دهد آن نقطه مینیمم نسبی تابع f خواهد بود.

33: اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و m مینیمم مطلق و M ماکزیمم مطلق تابع در این بازه باشند آن‌گاه برد تابع f، $R_f=[m,M]$ است.

34: نقاط بحرانی توابع چندجمله‌ای از حل معادلهٔ $f(x)=0$ به دست می‌آیند. (فرض کنید که f در R مشتق‌پذیر است)

در تابع با ضابطهٔ $y=|f(x)|$، نقاط بحرانی تابع:

1) ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$.

2) ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$

35: ① اکسترمم‌های مطلق تابع یا در نقاط ابتدا و انتها هستند یا اکسترمم‌های نسبی یا در نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است.

② اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f باشد و f در همسایگی c تعریف شده باشد، آن‌گاه اکسترمم نسبی هم هست.

③ لزومی ندارد تابع f در همسایگی نقاط اکسترمم مطلق خود تعریف شده باشد.